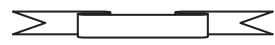


០១-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រូបសិស្សពូកែឆ្នាំ



១-គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \frac{3^x}{9^x + 3}$

ចូរស្រាយថាចំពោះគ្រប់  $t \in \mathbb{R}$  គេមាន  $f(\sin^2 t) = f(\cos^2 t)$

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ដោយដឹងថា ៖

$f(x+y) = y + f(x)$  ចំពោះគ្រប់  $x, y \in \mathbb{R}$  ។

៣-ក/ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$a - \frac{a^2}{2} \leq \ln(1+a) \leq a$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $a$  វិជ្ជមាន ។

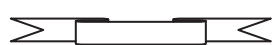
ខ/ ដោយប្រើវិសមភាពខាងលើចូរសេសសេរកន្សោមអមនៃស្វ៊ីត ៖

$u_n = \ln \left[ \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \left(1 + \frac{3}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right) \right]$

រួចទាញរកលីមីត  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  ។

០២-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ



១-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{\sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{2bc}} + \frac{b}{\sqrt{c^2 + a^2} + \sqrt{2ca}} + \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{2ab}} \geq \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ដោយដឹងថា ៖

$$f(x+y) = x + f(y) \text{ ចំពោះគ្រប់ } x, y \in \mathbb{R} \text{ ។}$$

៣-ចូរកំណត់គ្រប់គូតម្លៃគត់  $m, n \geq 3$  បើគេដឹងថាចំពោះគ្រប់

$$\text{ចំនួនគត់វិជ្ជមាន } a \text{ គេមាន } \frac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1} \text{ ជាចំនួនគត់ ។}$$

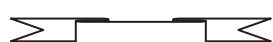
៤-គេយក  $P$  ជាចំណុចមួយនៅក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ហើយ  $D, E, F$

ជាជើងនៃចំណោលកែងពី  $P$  ទៅបន្ទាត់  $BC, CA, AB$  រៀងគ្នា ។

$$\text{ចូរស្រាយថា } PA + PB + PC \geq 2(PD + PE + PF) \text{ ។}$$

**០៣-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក**

**សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ**



១-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{n}{2} \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{n+3}{2}$$

ដែល  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$  ។

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ដោយដឹងថា ៖

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x, y \in \mathbb{R} \quad \text{។}$$

៣-ចូរបង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $n$  ចំនួន  $3^n + n^3$

ចែកដាច់នឹង ៧ លុះត្រាតែ  $3^n n^3 + 1$  ចែកដាច់នឹង ៧ ។

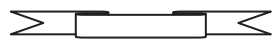
៤-គេឲ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយនិង  $P$  ជាចំណុចមួយនៅក្នុង  $\triangle ABC$  ។

ស្រាយបញ្ជាក់ថា យ៉ាងតិចមួយនៃមុំ  $\angle PAB, \angle PBC$  និង  $\angle PCA$

ត្រូវតូចជាង ឬ ស្មើទៅនឹង  $30^\circ$  ។

០៤-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ



១-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។

ស្រាយថា  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{27}{2} \cdot \frac{(ab+bc+ca)^3}{(a+b+c)^6} \geq 2$

២- ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  បើគេដឹងថា៖

$f(x+1) = f(x) + 1$  និង  $f(x^3) = f^3(x)$  ចំពោះគ្រប់  $x \in \mathbb{Q}^+$  ។

៣-គេឱ្យចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $m$  និង  $n$  ដែល  $1 \leq m < n$  ។

ចូរកំណត់តម្លៃតូចបំផុតនៃ  $m+n$  ដើម្បីឱ្យចំនួន  $2012^m$  និង  $2012^n$  មានលេខខ្ទង់ចុងក្រោយបំផុតដូចគ្នា?

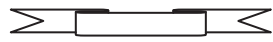
៤-គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $a, b, c$  និងផ្ទៃក្រឡា  $S$

ឧបមាថា  $DEF$  ជាត្រីកោណចារឹកក្នុងត្រីកោណ  $ABC$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា  $DE + EF + FD \geq \frac{8S^2}{abc}$

០៥-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ



១-គេឲ្យ  $a, b, c$  ជារង្វាស់ជ្រុងនៃត្រីកោណមួយ ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} + \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \geq 4 \quad \text{។}$$

២- គេឲ្យអនុគមន៍  $f$  កំណត់ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិតហើយផ្ទៀងផ្ទាត់ ៖

$$f(x) \leq x \quad \text{និង} \quad f(x+y) \leq f(x) + f(y) \quad \text{ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត } x, y \quad \text{។}$$

ចូរស្រាយថា  $f(x) = x$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  ។

៣-គេឱ្យ  $N$  ជាចំនួនមានលេខបីខ្ទង់ ។ គេដឹងថា  $N$  ចែកដាច់នឹង 11

ហើយ  $N$  ចែកនឹង 11 បានផលចែកស្មើនឹងផលបូកការេនៃលេខ

ខ្ទង់របស់  $N$  ។ ចូរកំណត់លេខទាំងបីខ្ទង់របស់  $N$  ?

៤-គេឱ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយ ។ គេតាង  $I$  ជាផ្ចិតនៃរង្វង់ចារឹកក្នុង

ត្រីកោណនេះ ។ កន្លះបន្ទាត់ពុះក្នុងនៃមុំ  $A, B, C$  កាត់ជ្រុងឈម

រៀងគ្នាត្រង់  $A', B', C'$  ។ ស្រាយថា  $\frac{1}{4} < \frac{AI \cdot BI \cdot CI}{AA' \cdot BB' \cdot CC'} \leq \frac{8}{27}$

**០៦-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច**

**សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ**



១-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។

ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា 
$$\sqrt{\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3abc}} + \sqrt[3]{\frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}} \geq 2$$

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ដោយដឹងថា ៖

$f(x \cdot f(y) + x) = xy + f(x)$  ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត  $x$  និង  $y$  ។

៣-ចូរកំណត់គូមួយនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $a, b$  ដោយដឹងថា៖

(i) :  $ab(a + b)$  ចែកមិនដាច់នឹង 7

(ii) :  $(a + b)^7 - a^7 - b^7$  ចែកដាច់នឹង  $7^7$  ។

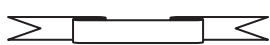
៤-គេឲ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a, AC = b, AB = c$

ចូរកំណត់ចំណុច  $P$  នៃប្លង់ដើម្បីឲ្យ  $a \cdot PA^2 + b \cdot PB^2 + c \cdot PC^2$

មានតម្លៃអប្បបរមា រួចកំណត់តម្លៃអប្បបរមានេះ ។

០៧-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ



១-គេឲ្យ  $a, b, c$  ជាបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន ។ ចូរស្រាយថា ៖

$$\frac{a(b+c)}{\sqrt{bc(b^2+c^2)}} + \frac{b(c+a)}{\sqrt{ca(c^2+a^2)}} + \frac{c(a+b)}{\sqrt{ab(a^2+b^2)}} \geq 3\sqrt{2}$$

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  ដោយដឹងថា ៖

$$f\left(x + \frac{y}{x}\right) = f(x) + \frac{f(y)}{f(x)} + 2y \quad \text{ចំពោះគ្រប់ } x, y \in \mathbb{Q}^+ \text{ ។}$$

៣-ចូរកំណត់គ្រប់គូនៃចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $(x, y)$  ដោយដឹងថា

$$x^2y + x + y \text{ ចែកជាចំនួន } xy^2 + y + 7 \text{ ។}$$

៤-គេឲ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយ ។ ចំណុច  $D$  និង  $E$  ស្ថិតនៅលើ

បន្ទាត់  $BC$  ដោយដឹងថាបន្ទាត់  $AD$  និង  $AE$

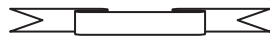
ស្របទៅនឹងបន្ទាត់ប៉ះ

នឹងរង្វង់ចារឹកក្រៅនៃត្រីកោណ  $ABC$  ត្រង់  $B$  និង  $C$  រៀងគ្នា ។

$$\text{ចូរស្រាយថា } \frac{BE}{CD} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \text{ ?}$$

០៨-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិក

សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ



១-គេឲ្យបីចំនួនពិតវិជ្ជមាន  $a, b, c$  ។ ចូរស្រាយបញ្ជាក់ថា ៖

$$\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \sqrt{abc} + \frac{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}{\sqrt{2}}$$

២-ចូរកំណត់គ្រប់អនុគមន៍  $f : \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+$  បើគេដឹងថា

$$f(x+1) = f(x) + 1 \text{ និង } f(x^2) = f^2(x) \text{ ចំពោះគ្រប់ } x \in \mathbb{Q}^+ \text{ ។}$$

៣-គេឱ្យស្វ៊ីត  $(u_n)$  កំណត់ដោយ៖

$$u_0 = 2, u_1 = \frac{5}{2}, u_{n+1} = u_n(u_{n-1}^2 - 2) - u_1 \text{ ចំពោះ } n = 1, 2, \dots$$

បង្ហាញថាចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់វិជ្ជមាន  $n$  គេមាន  $\lfloor u_n \rfloor = 2^{\frac{2^n - (-1)^n}{3}}$

( ដែល  $\lfloor x \rfloor$  តាងជាចំនួនគត់វិជ្ជមានតូចជាង  $x$  )

៤-គេយក  $I$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុង និង  $O$  ជារង្វង់ចារឹកក្រៅនៃ

ត្រីកោណ  $ABC$  ដែលមិនមែនជាត្រីកោណសម័ង្ស

ចូរបង្ហាញថា  $\angle AIO \leq 90^\circ$  លុះត្រាតែ  $2BC \leq AB + AC$

**០៩-គណិតវិទ្យាអូឡាំពិច**

**សម្រាប់គ្រឿងសិស្សពូកែ**



១-គេឲ្យអនុគមន៍  $f : \mathbf{IR} \mapsto \mathbf{IR}$  ដែលផ្ទៀងផ្ទាត់សមីការ ៖

$$f(x) + (4^x + 1)f(1-x) = 2^x \text{ គ្រប់ } x \in \mathbf{IR} \text{ ។}$$

ក/ចូររកអនុគមន៍  $f(x)$  ។

ខ/ចូរបង្ហាញថាមានចំនួនថេរ  $a$  ដែល  $f(a-x) = f(x)$  គ្រប់  $x \in \mathbf{IR}$

២-គេឲ្យ  $a \in \mathbf{IN}$  ដែល  $\gcd(a,6) = 1$  ។

ចូរស្រាយថា  $2a^2 + 3a + 1$  ចែកជាចំនួន  $6$  ?

៣-គេមានអនុគមន៍  $f(x) = \log_2(2^x + 1)$

$$\text{ចូរគណនា } f_n(x) = f_n[f[\dots f[f(x)]\dots]]$$

៤-គេឲ្យត្រីកោណ  $ABC$  មួយមានជ្រុង  $BC = a, AC = b, AB = c$

$$I \text{ ជាចំនុចមួយនៃប្លង់ ។ បង្ហាញថា } a \cdot IA^2 + b \cdot IB^2 + c \cdot IC^2 = abc$$

លុះត្រាតែត  $I$  ជាផ្ចិតរង្វង់ចារឹកក្នុងនៃត្រីកោណ ។